# Eine neue Interpretation und elementare Abschätzung für den Internen Zinsfuß

Hartwig Mennenöh

**In diesem Beitrag werden im ersten Teil eine neue Definition und damit zugleich auch eine neue Interpretation des Internen Zinsfußes vorgestellt. Ausgehend von dieser neuartigen Basis wird im zweiten Teil eine neue, elementare Schätzgleichung für den konkreten Zahlenwert des internen Zinsfußes hergeleitet.**



## I. Eine neue Interpretation für den Internen Zinsfuß

### A. Eine neue Definition für den Internen Zinsfuß

Während seiner beruflichen Tätigkeit als Leiter der Unternehmensplanung in der Zentrale eines deutschen Großkonzerns erreichte den Verfasser eine interne Anfrage. Darin beklagte die Leitung des Controllings, dass sie bei ihren Besprechungen mit den Tochtergesellschaften immer wieder ein mangelndes anschauliches Verständnis des Internen Zinsfußes feststellen musste. Die übliche Definition des Internen Zinsfußes als Nullstelle der Kapitalwertfunktion war den Praktikern einfach zu abstrakt.

Der Verfasser nahm die Bitte des Controllings um Vorschläge zur Abhilfe zum Anlass, eine neue, sehr anschauliche Definition des Internen Zinsfußes zu entwickeln („:=“ bedeutet „ist definiert als“):

(1) **Interner Zinsfuß (r) :=**
**Maximaler Verzinsungsanspruch (Zinssatz i), den die Zahlungsreihe ($-a_0$, $c_1$, $c_2$, … , $c_n$) einer Investition über den vollständigen Rückfluss des eingesetzten Kapitals ($a_0$) hinaus gerade noch mit Zinsen ($Z_1$, $Z_2$, … , $Z_n$) bedienen kann.**

Nach Definition (1) kann der Interne Zinsfuß r als ein Maß für die **Zinsen-Tragfähigkeit** einer Investition interpretiert werden.

---

**Prof. Dr. Hartwig Mennenöh, Hochschullehrer i. R. an der Fachhochschule Dortmund; E-Mail: hartwig.mennenoeh@fh-dortmund.de;** **Fundstelle: PubliDo, Hochschulschriftenserver der Fachhochschule Dortmund**

## B. Eine Zins- und Tilgungsrechnung zur Veranschaulichung des Internen Zinsfußes

Der Interne Zinsfuß nach Definition (1) soll jetzt anhand einer Zins- und Tilgungsrechnung (Tabellen (2) bis(4)) für ein beispielhaftes Investitionsprojekt, analog zu einem Kredit, veranschaulicht werden. Der Investor gewährt der Investition einen Kredit (eingesetztes Kapital $a_0$), den die Investition durch ihre Einzahlungsüberschüsse ($c_1$, $c_2$, … , $c_n$) nebst den jeweils fälligen Zinsen ($Z_1$, $Z_2$, … , $Z_n$) vollständig durch Tilgungen ($T_1$, $T_2$, … , $T_n$) zurückbezahlen muss ($a_0$-($T_1$+$T_2$+…+ $T_n$)=0). Der Interne Zinsfuß (r) ist der maximale Verzinsungsanspruch (i), bei dem die Investition die notwendigen Zins- und Tilgungszahlungen gerade noch leisten kann.

Um den maximalen Verzinsungsanspruch i=r herauszufinden, wird in den nachstehenden Tabellen (2) bis (4) der Verzinsungsanspruch i sukzessive von i=8% (Tabelle (2)) über i=10% (Tabelle (3)) auf i=12% (Tabelle (4)) heraufgesetzt.

Dabei gelten in Definition (1) und in den nachstehenden Tabellen (2) bis (4) folgende Symbole und Beziehungen (Zusatz „Sum“ := „Summe“; Zusatz „B“ := „beansprucht“; ZSumB:= gemäß Verzinsungsanspruch i *beanspruchte* Zinssumme):

(a) i := Verzinsungsanspruch
(b) t := Zeitpunktvariable (Periodenenden); t=0 oder $t_0$ := Laufzeitbeginn,
t=n oder $t_n$ := Laufzeitende, n := Laufzeit (Dauer) der Investition
(c) $–a_0$ := Anschaffungsauszahlung der Investition; $a_0$:=eingesetztes Kapital
(d) $c_t$ := periodische Einzahlungsüberschüsse (Einzahlungen-Auszahlungen) der Investition
(e) $RK_t(i)$ := im Zeitpunkt t noch zu tilgendes Restkapital; $RK_0=a_0$
(f) $Z_t(i)$ := im Zeitpunkt t fällige nachschüssige Zinsen; $Z_t(i) = i^* RK_{t-1}(i)$
(g) $T_t(i)$ := im Zeitpunkt t gezahlte Tilgung; $T_t(i) = c_t- Z_t(i)$; $RK_t(i) = RK_{t-1}(i)-T_t(i) = RK_{t-1}(i)*(1+i)-c_t$
(h) Für **i = r**: $TSum(r) = RK_0 = a_0$ ( vollständiger Rückfluss des eingesetzten Kapitals);
$\mathbf{RK_n(r) = RK_0\text{-}TSum(r) = 0}$

**Fall 1:**

| i | 8,00% |
|---|---|

(2)

| t | -a | c | Z | T | RK |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1000 | | | | 1000,00 |
| 1 | | 300 | 80,00 | 220,00 | 780,00 |
| 2 | | 180 | 62,40 | 117,60 | 662,40 |
| 3 | | 370 | 52,99 | 317,01 | 345,39 |
| 4 | | 240 | 27,63 | 212,37 | 133,02 |
| 5 | | 220 | 10,64 | 209,36 | -76,33 ← |
| Summe | -1000 | 1310 | 233,67 | 1076,33 | 2920,82 |
| | -aSum | cSum | **ZSumB** | TSum | RKSum (*) |

(*) Summe für t=0 bis t=**n-1**

ZSumB zu klein, TSum zu groß, $RK_5$ negativ (Übertilgung): i=8% < r (i zu klein)

**Fall 2:** | i | 10,00% |

(3)

| t | -a | c | Z | T | RK |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1000 | | | | 1000,00 |
| 1 | | 300 | 100,00 | 200,00 | 800,00 |
| 2 | | 180 | 80,00 | 100,00 | 700,00 |
| 3 | | 370 | 70,00 | 300,00 | 400,00 |
| 4 | | 240 | 40,00 | 200,00 | 200,00 |
| 5 | | 220 | 20,00 | 200,00 | 0,00 ← |
| Summe | -1000 | 1310 | 310,00 | 1000,00 | 3100,00 |
| | -aSum | cSum | **ZSumB** | TSum | RKSum (*) |

(*) Summe für t=0 bis t=**n-1**

ZSumB maximal, TSum exakt ($a_0$**), $RK_5$ = 0** (vollständiger Rückfluss): **i=10% = r** (i maximal)

**Fall 3:** | i | 12,00% |

(4)

| t | -a | c | Z | T | RK |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1000 | | | | 1000,00 |
| 1 | | 300 | 120,00 | 180,00 | 820,00 |
| 2 | | 180 | 98,40 | 81,60 | 738,40 |
| 3 | | 370 | 88,61 | 281,39 | 457,01 |
| 4 | | 240 | 54,84 | 185,16 | 271,85 |
| 5 | | 220 | 32,62 | 187,38 | 84,47 ← |
| Summe | -1000 | 1310 | 394,47 | 915,53 | 3287,26 |
| | -aSum | cSum | **ZSumB** | TSum | RKSum (*) |

(*) Summe für t=0 bis t=**n-1**

ZSumB zu groß, TSum zu klein, $RK_5$ positiv (Untertilgung): i=12% > r (i zu groß)

[1]

Nach (1) bis (4) ist der Interne Zinsfuß r die Lösung folgender äquivalenter Bestimmungsgleichungen (5) bis (7):

[1] Kommentar des Leiters Controlling (vgl. I.A.) zu dem Vorschlag (1) bis (4): „Souverän!"

| | |
|---|---|
| (5) | **$RK_n(r) = 0$** (in (1):“vollständiger Rückfluss“) |

| | |
|---|---|
| (6) | **$TSum(r) = a_0$** (in (1):“vollständiger Rückfluss“) |

Und wegen TSum(r) = cSum – ZSumB(r):

| | |
|---|---|
| (7) | **ZSumB(r) = cSum – $a_0$ =: ZSumE** (in (1):“maximaler Verzinsungsanspruch“) |
| | wobei:<br><br>ZSumB(i) := gemäß Verzinsungsanspruch i ***beanspruchte*** Zinssumme<br>ZSumE := von der Investition ***erwirtschaftete*** Zinssumme cSum – $a_0$<br><br>(von der Summe der Einzahlungsüberschüsse cSum wird ein Betrag in Höhe von $a_0$ für den Rückfluss des eingesetzten Kapitals benötigt, der Rest cSum – $a_0$ steht für Zinsen zur Verfügung) |

Die überaus wichtige Bestimmungsgleichung (7) ist ein Spezialfall (i=r; $RK_n(r)=0$) der nachstehenden noch wichtigeren, weil allgemeingültigen (i=beliebig) Gleichung (5a) für das Restkapital $RK_n(i)$.

Aus $RK_n(i)=a_0-TSum(i)=a_0-(cSum-ZSumB(i))$ folgt:

| | |
|---|---|
| (5a) | **$RK_n(i)$ = ZSumB(i)-ZSumE**<br><br>wobei:<br>ZSumE:=cSum-$a_0$=konst. |

Alle obenstehenden Bestimmungsgleichungen (5) bis (7) sowie die allgemeingültige Gleichung (5a) können vorteilhaft für ein anschauliches Verständnis des Internen Zinsfußes herangezogen werden. Insbesondere die Bestimmungsgleichung (7), die eine direkte Formalisierung der Definition (1) darstellt, sowie die allgemeingültige Gleichung (5a): bei sukzessivem Heraufsetzen des Verzinsungsanspruchs i ist der Interne Zinsfuß r dann erreicht, wenn die gemäß i ***beanspruchte*** Zinssumme ZSumB(i) gerade auf die von der Investition ***erwirtschaftete*** Zinssumme ZSumE angestiegen ist (vgl. Gleichung (7) und Tabelle (3)) und damit das anfänglich negative Restkapital zum Laufzeitende $RK_n(i)$ den Wert $RK_n(r)=0$ erreicht hat (Gleichung (5a); in (1):“maximaler Verzinsungsanspruch“). Dies führt zu einer alternativen Definition zu (1):

| | |
|---|---|
| (8) | **Der Interne Zinsfuß r ist jener Verzinsungsanspruch i, bei dem die <u>beanspruchte</u> Zinssumme ZSumB(i) genau der <u>erwirtschafteten</u> Zinssumme ZSumE entspricht:**<br>**ZSumB(r) = ZSumE := cSum – $a_0$** |

Die nachstehende Abbildung 1 zeigt für die Investition in den Tabellen (2) bis (4) den Kurvenverlauf für die Größen ZSumB(i), TSum(i) und $RK_n(i)$ aus den Gleichungen (5) bis (7) bei sukzessiv steigendem Verzinsungsanspruch i:

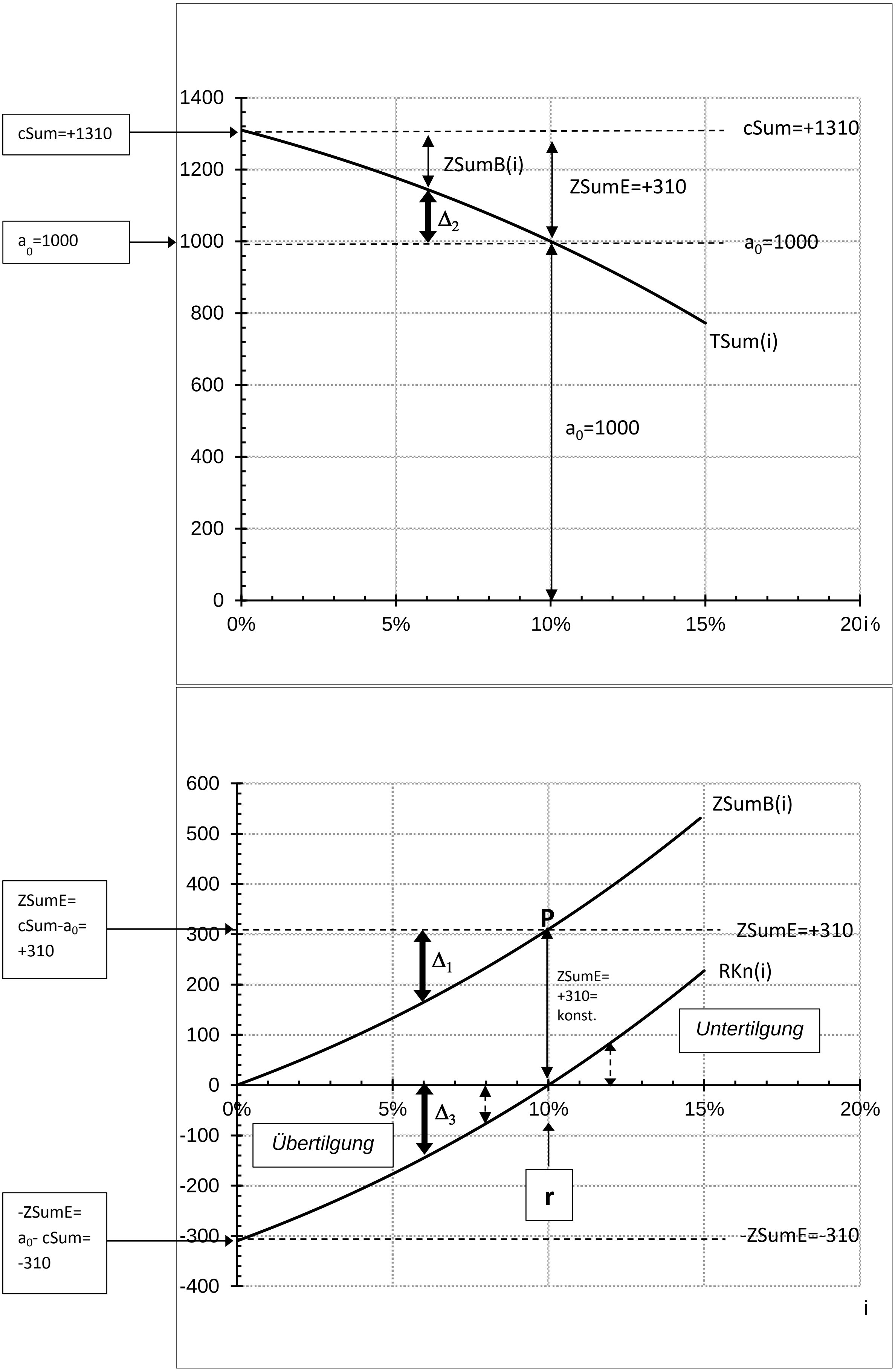


**Abbildung 1: Kurvenverlauf von ZSumB(i), TSum(i), RKn(i) aus Tabellen (2) bis (4)**

Zunächst einige Hinweise auf Besonderheiten in Abbildung 1:

- Alle drei Kurven ZSumB(i), TSum(i) und $RK_n$(i) sind „Abbilder“ voneinander (Parallelverschiebung bzw. Achsensymmetrie).
- Der Abstand zwischen ZSumB(i) und $RK_n$(i) ist konstant in Höhe von ZSumE=cSum-$a_0$ (aus Gleichung (5a)).
- Unter Berücksichtigung des korrekten Vorzeichens gilt:
  $RK_n(i)=\Delta_3(i)=\Delta_2(i)=\Delta_1(i)$ ($\Delta_2$(i): aus $RK_n(i)=a_0$-TSum(i); $\Delta_1$(i): aus Gleichung (5a)).

Wenn in Abbildung 1 der Verzinsungsanspruch i steigt, dann steigt die beanspruchte Zinssumme ZSumB(i), fällt die Tilgungssumme TSum(i)=cSum-ZSumB(i) und steigt das Restkapital $RK_n(i)=a_0$-TSum(i), die letzten drei Größen alle um ***denselben*** Betrag. Die Kurven ZSumB(i) und $RK_n$(i) verlaufen also ***parallel*** und die Kurven ZSumB(i) und TSum(i) ***achsensymmetrisch*** zueinander (Symmetrieachse: die Horizontale y=cSum/2=($a_0$+ZSumE)/2=konst.). Darüber hinaus verlaufen die Kurven $RK_n$(i) und TSum(i) ebenfalls ***achsensymmetrisch*** zueinander (Symmetrieachse: die Horizontale y=cSum/2-ZSumE/2=$a_0$/2=konst.).

Um sich in dem vorgestellten, nicht gerade trivialen System analytisch sicher bewegen zu können, empfiehlt es sich, die Summenzeilen der Tabellen (2) bis (4) (cSum → ZSumB → TSum=cSum-ZSumB → $RK_n=a_0$-TSum) gedanklich mit der Abbildung 1 zu verbinden:

Beispiel 1: i=0; cSum=1310 (gegeben); ZSumB=0 (wegen i=0); TSum=1310 (wegen TSum=cSum-ZSumB); $RK_n$=-310 (wegen $a_0$=1000 (gegeben), $RK_n=a_0$-TSum).

Beispiel 2: i=r=10%; $RK_n$= $a_0$-TSum=0 (vollständiger Rückfluss); TSum=$a_0$=1000 ($a_0$ gegeben); ZSumB=310 (wegen TSum=cSum-ZSumB; cSum=1310 gegeben).

Zu Übungszwecken sollten die Leser alle oben vorgestellten Summenzahlen in Abbildung 1 nachvollziehen. Dabei entsprechen die Summenzeilen der Tabellen (2) bis (4) jeweils einer senkrechten „Spalte“ in der Abbildung 1 an der jeweiligen Stelle $i=i^+$. Besonders zu beachten ist der Punkt P oberhalb von $i^+$=r=10%, bei dem der Verzinsungsanspruch i den maximal zulässigen Wert von r=10% erreicht hat (Definition (1)) und die beanspruchte Zinssumme ZSumB(i) auf den maximal zulässigen Wert von ZSumE=310, also auf die von der Investition erwirtschaftete Zinssumme cSum-$a_0$ angestiegen ist (Gleichung (7)).

Abbildung 1 legt eine weitere anschauliche Definition für den Internen Zinsfuß r nahe:

| | |
|---|---|
| (9) | **Der Interne Zinsfuß r ist jener Verzinsungsanspruch i, der weder zu einer Übertilgung ($RK_n(i)<0$) noch zu einer Untertilgung ($RK_n(i)>0$) führt.** |

Zum Schluss dieses Abschnitts noch ein wichtiger Hinweis: oben und auch im Folgenden wird als ***Prämisse*** jeweils eine ***„Normalinvestition“*** unterstellt, so dass die Kurve für die Funktion $RK_n$(i) (vgl. (5) und (5a) oben) mit wachsendem i monoton steigt und nur ein einziger positiver Lösungswert für r existiert (Eindeutigkeit von r; vgl. Abbildung 1). Die hier betrachteten „einfachen“ Normalinvestitionen zeichnen sich dadurch aus, dass sie mit einer Anschaffungsauszahlung beginnen (-$a_0$) und die nachfolgenden Einzahlungsüberschüsse allesamt nichtnegativ sind ($c_t \geq 0$ für t=1 bis t=n) sowie in der Summe das eingesetzte Kapital decken ($c_1+c_2+\ldots+c_n>a_0$)[2]. Für Normalinvestitionen ist also die erwirtschaftete Zinssumme ZSumE=cSum-$a_0$ stets größer als Null.

## C. Vergleich mit anderen Wirtschaftlichkeitskennzahlen für Investitionen

Die drei wichtigsten Wirtschaftlichkeitskennzahlen für Investitionen sind der hier dargestellte Interne Zinsfuß r mit dem damit eng verknüpften Restkapital zum Laufzeitende $RK_n(i)$, der auf den Laufzeitbeginn t=0 bezogene Kapitalwert $C_0(i)$ und der auf das Laufzeitende t=n bezogene Kapitalwert $C_n(i)$. Um einen analytischen Vergleich dieser drei Größen zu ermöglichen, müssen diese zunächst in je einer Gleichung formalisiert werden.

Der auf den Laufzeitbeginn t=0 bezogene Kapitalwert $C_0(i)$ ist definiert als:

(10) $$\boxed{C_0(i) = -a_0 + \frac{c_1}{(1+i)^1} + \frac{c_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(1+i)^n}}$$

Der auf das Laufzeitende t=n bezogene Kapitalwert $C_n(i)$ ist definiert als:

(11) $$\boxed{C_n(i) = -a_0(1+i)^n + c_1(1+i)^{n-1} + c_2(1+i)^{n-2} + \cdots + c_n}$$

Aus den Gleichungen (10) und (11) folgt sofort:

(12) $$\boxed{C_n(i) = C_0(i) * (1+i)^n}$$

Das Restkapital zum Laufzeitende $RK_n(i)$ errechnet sich nach der Staffelrechnung in den Tabellen (2) bis (4) zu:

(13)

$RK_0=a_0$

$RK_1(i)=RK_0-T_{1=}RK_0-(c_1-i*RK_0)= RK_0*(1+i)^1-c_1$

$RK_2(i)=RK_1*(1+i)^1-c_2=RK_0*(1+i)^2-c_1*(1+i)^1-c_2$

$RK_3(i)=RK_2*(1+i)^1-c_3=RK_0*(1+i)^3-c_1*(1+i)^2-c_2*(1+i)^1-c_3$

usw.

$\mathbf{RK_n(i)=a_0*(1+i)^n-c_1*(1+i)^{n-1}-c_2*(1+i)^{n-2}-c_3*(1+i)^{n-3}- \ldots -c_n}$

[2] Vgl. z.B. Busse von Colbe, W. / Laßmann, G. : Betriebswirtschaftstheorie, Band 3. Investitionstheorie, 3. Aufl. 1990, S. 110 f.

Zu beachten ist, dass die Gleichung (13) und die Staffelrechnung in den Tabellen (2) bis (4) zu demselben Wert für $RK_n(i)$ führen.

Aus den Gleichungen (13) sowie (11) und (12) folgt schließlich:

$$\boxed{\mathbf{RK_n(i) = -C_n(i) = -C_0(i) * (1+i)^n}} \qquad (14)$$

Nach Gleichung (14) sind die hier vorgestellte neue Definition des Internen Zinsfußes r als Nullstelle der Funktion $RK_n(i)$ (vgl. (1) bis (5) sowie (5a) und (13)) und die traditionelle Definition des Internen Zinsfußes r als Nullstelle der Kapitalwertfunktion $C_0(i)$ ($C_0(r)=0$; vgl. (10)) ***äquivalent***. Aus $RK_n(r)=0$ (linke Seite von (14)) folgt $C_0(r)=0$ (rechte Seite von (14)) und umgekehrt. Der ohnehin nur theoretische Fall i=-1=-100% muss in Gleichung (14) als unzulässig ausgeschlossen werden, weil er für den Kapitalwert $C_0(i)$ in Gleichung (10) zu unzulässigen Divisionen durch Null führen würde.

Die nachstehende Abbildung 2 zeigt für die in den Tabellen (2) bis (4) dargestellte Investition den Kurvenverlauf der Wirtschaftlichkeitskennzahlen $RK_n(i)$, $C_n(i)$ und $C_0(i)$:

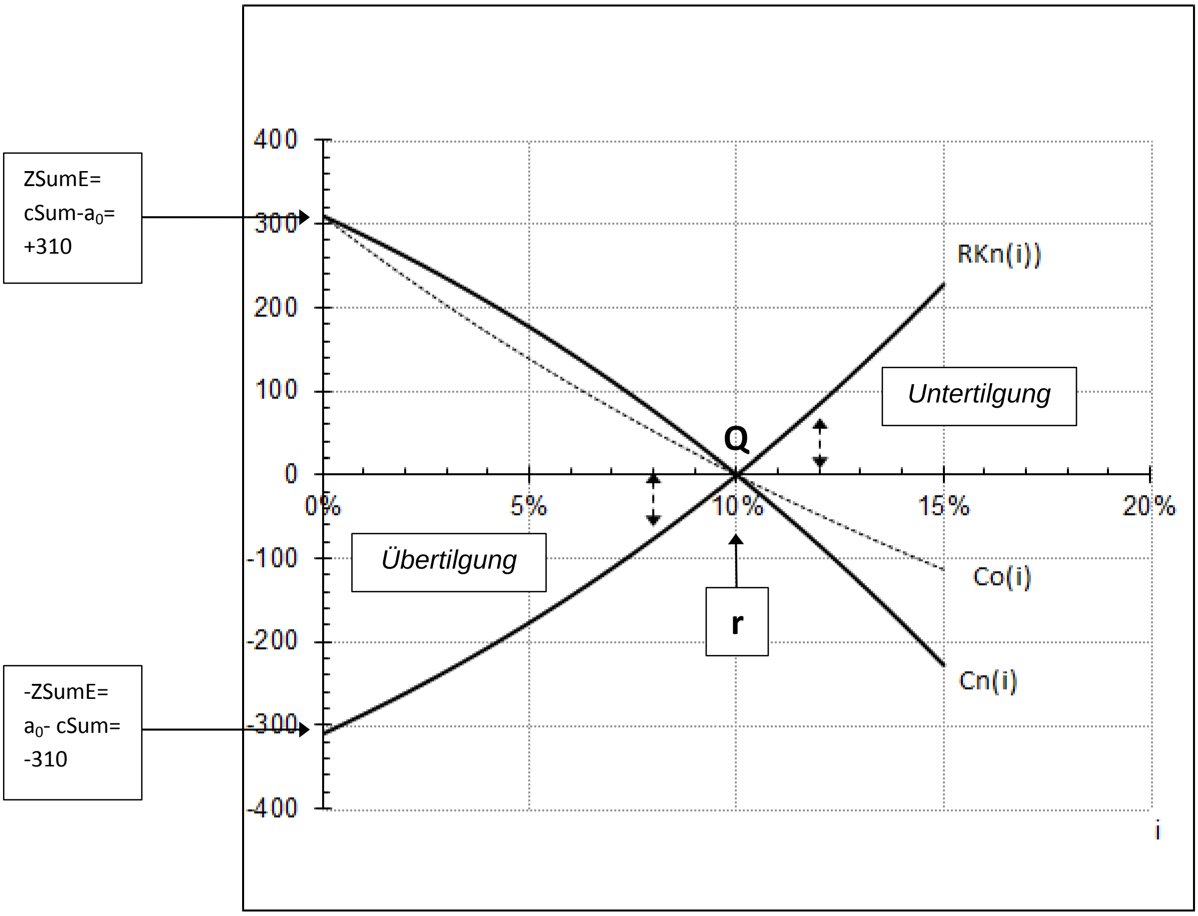


**Abbildung 2: Kurvenverlauf von $RK_n(i)$, $C_n(i)$ und $C_0(i)$**

Die Gleichungen (10) bis (14) und die Abbildung 2 zeigen den engen Zusammenhang zwischen den drei dargestellten Wirtschaftlichkeitskennzahlen für Investitionen. So ist die Kurve der Kapitalwertfunktion $C_n(i)$ ein exaktes achsensymmetrisches Spiegelbild der Kurve für die in den Tabellen (2) bis (4) verwendete Restkapitalfunktion $RK_n(i)$. Zudem schneiden sich alle drei Kurven in ein- und demselben Punkt Q(r; 0) der i-Achse, der den Internen Zinsfuß r kennzeichnet: $RK_n(r)=C_n(r)=C_0(r)=0$. Darüber hinaus gilt: $|RK_n(i=0)|=C_n(i=0)=C_0(i=0)=cSum-a_0=ZSumE$. Daran zeigt sich erneut die zentrale Bedeutung der hier eingeführten Größe ZSumE (erwirtschaftete Zinssumme, vgl.(7)).

## II. Eine elementare Abschätzung für den Internen Zinsfuß

Im zweiten Teil dieses Beitrags soll nun auf der Ausgangsbasis des ersten Teils erstmals eine einfache Schätzformel zur Ermittlung des Zahlenwertes des Internen Zinsfußes r entwickelt werden.

### A. Nützlichkeit einer einfachen Schätzformel

Die vorzustellende einfache Schätzformel soll erstmals eine annähernde Berechnung des Internen Zinsfußes r direkt anhand einer einzigen Gleichung, quasi „im Kopf" bzw. mit Hilfe eines einfachen Taschenrechners, ermöglichen.[3]

Demgegenüber setzt die Bestimmung des konkreten Zahlenwertes von r nach der traditionellen Definition des Internen Zinsfußes als Nullstelle der Kapitalwertfunktion $C_0(i)$ die Lösung der Bestimmungsgleichung $C_0(r)=0$ voraus. Nach Gleichung (10) bedeutet dies, die Lösung eines Polynoms n-ten Grades zu ermitteln. Hierfür existiert für Projektlaufzeiten $n>3$ aus mathematischen Gründen keine allgemeingültige Lösungsgleichung. Stattdessen werden i.d.R. iterative (schrittweise) Verfahren der numerischen Mathematik eingesetzt, z.B. die Funktion IKV(.) in der Tabellenkalkulation Microsoft Excel. Diese sind aber mit einigen Nachteilen behaftet. Manchmal finden sie die gesuchte Lösung für r gar nicht. Bei der Funktion IKV(.) von Microsoft ist es deshalb ratsam, einen *„Schätzwert"* (sic!) für den Suchprozess vorzugeben, der möglichst nahe bei dem vermuteten Wert für r liegen sollte (ein guter Anwendungsfall für die vorzustellende Schätzformel). Zudem ist die von den iterativen Verfahren gefundene Lösung für r nicht absolut exakt, sondern ebenfalls nur ein Näherungswert. Für einen möglichst präzisen Näherungswert ist darüber hinaus eine sehr große Anzahl von Iterationen (Rechenschritten) erforderlich.

Letzteres kann selbst bei Einsatz der EDV wegen der damit verbundenen Ressourcenbeanspruchung (insbesondere Rechenzeit) ein gravierender Nachteil sein. Z.B. dann, wenn für eine sehr große Anzahl von Investments zudem in kurzen Aktualisierungsabständen die Internen Zinsfüße zu berechnen sind. Aus diesem Grund hat z.B. ein Fondsmanager eines großen deutschen Finanzinstituts bei dem Verfasser angefragt, ob dieser ihm eine einfache Schätzgleichung mit nur einem einzigen Arbeitsschritt zur Verfügung stellen könne.

---

[3] Die Näherungslösungen von ***Boulding*** für das Zeitzentrum einer Investition einerseits und darauf aufbauend für den Internen Zinsfuß r andererseits werden hier nicht als Konkurrenz für die vorzustellende einfache Schätzformel für den Internen Zinsfuß r angesehen. Gründe: 1. Statt einer sind bei Boulding gleich zwei Schätzgleichungen (Schätzung Zeitzentrum; Schätzung r) anzuwenden. 2. Zu rechenaufwendig für ad hoc-Berechnungen (u.a. müssen eine zeitlich gewichtete Summe der gesamten Reihe der Einzahlungsüberschüsse sowie eine Wurzel höheren Grades errechnet werden; wenn man sinnvollerweise den Computer einsetzt, sollte man stattdessen gleich die überlegene Funktion IKV(.) von Microsoft Excel verwenden.). 3. Der gefundene Schätzwert für r nach Boulding und die zugrundeliegenden Schätzgleichungen sind keiner ökonomischen Interpretation zugänglich. – Zu den Näherungslösungen von Boulding vgl. z. B. Lücke , W. (Hrsg.): Investitionslexikon, 2.Aufl. 1991, S. 34 f. („Bouldingsche Näherungslösung") und S. 148 f. („Interner Zinsfuß, Berechnung").

Die hier angestrebte annähernde Berechnung des Internen Zinsfußes r direkt anhand einer einzigen Schätzgleichung bietet also im Vergleich erhebliche Vorteile.

**B. Der Interne Zinsfuß als einfache Rendite**

In einem vorbereitenden Schritt werden nun zunächst der Verzinsungsanspruch i und danach auch der Interne Zinsfuß r auch für Laufzeiten n>1 als ***einfache Rendite*** (Zinsen/Kapital) dargestellt.

Die für diesen Zweck benötigten Durchschnittsgrößen erfordern zusätzliche Symbole:

(15)

Zusatz "Dur":="Durchschnitt"

ZDurE:=ZSumE/n=:erwirtschafteter Zinsdurchschnitt

ZDurB:=ZSumB/n=:beanspruchter Zinsdurchschnitt

RKDur:=RKSum/n=:Restkapitaldurchschnitt

Aus ZSumB(i)=$Z_1$(i)+$Z_2$(i)+…+ $Z_n$(i)=$RK_0$*i+$RK_1$(i)*i+…+$RK_{n-1}$(i)*i=($RK_0$+$RK_1$(i)+…+$RK_{n-1}$(i))*i folgt:

(16)

$$i = \frac{ZSumB(i)}{RKSum(i)} = \frac{ZDurB(i)}{RKDur(i)} = \frac{Beanspruchter\ Zinsdurchschnitt}{Restkapitaldurchschnitt}$$

mit:
RKSum(i)= $RK_0$+$RK_1$(i)+…+$RK_{n-1}$(i)

Zu beachten ist, dass in Gleichung (16) der Laufindex für RKSum(i) von t=0 bis t=n-1 geht (nicht von t=1 bis t=n !). Mit Gleichung (16) ist es gelungen, den Verzinsungsanspruch i auch für Laufzeiten n>1 als einfache Rendite (Zinsen/Kapital) darzustellen.

Nach Gleichung (7) ist ZSumB(r) = cSum – $a_0$ =: ZSumE. Einsetzen von ZSumB(r) in (16) ergibt schließlich:

(17)

$$r = \frac{ZSumB(r)}{RKSum(r)} = \frac{ZDurE}{RKDur(r)} = \frac{Erwirtschafteter\ Zinsdurchschnitt}{Restkapitaldurchschnitt(r)}$$

mit:
ZDurE:=ZSumE/n=(cSum – $a_0$)/n
RKDur(r):=RKSum(r)/n
RKSum(r)= $RK_0$+$RK_1$(r)+…+$RK_{n-1}$(r)

Mit Gleichung (17) ist es gelungen, selbst den komplexen ***Internen Zinsfuß r*** auch für Laufzeiten n>1 als ***einfache Rendite*** (Zinsen/Kapital) darzustellen. Dabei wird in (17) obendrein die aufwendig zu berechnende Größe „Beanspruchter Zinsdurchschnitt" aus (16) durch die äußerst einfach zu berechnende Größe „Erwirtschafteter Zinsdurchschnitt" ((cSum – $a_0$)/n) ersetzt.

## C. Eine einfache Schätzformel für den Internen Zinsfuß

Gleichung (17) eignet sich allerdings noch nicht für die direkte numerischen Ermittlung des Internen Zinsfußes, weil die gesuchte Größe r auf der linken Seite über den Nenner auf der rechten Seite von sich selbst abhängt. Zur Vermeidung eines solchen "logischen Zirkels" ist die Größe RKDur(r) im Nenner der rechten Seite von (17) durch eine geeignete Schätzgröße $RK^*Dur$ zu ersetzen, die ***nicht*** von r abhängt.

Die für diesen Zweck benötigten Schätzgrößen erfordern zusätzliche Symbole:

(18)

Zusatz " * " (hochgestellter Stern) := "Schätzwert" oder „geschätzt"

$RK^*_t$:= geschätztes Restkapital zum Zeitpunkt t

$RK^*Sum:=RK_0+RK^*_1+\ldots+RK^*_{n-1}$=:geschätzte Restkapitalsumme
($RK_0=a_0$ ist zinsunabhängig und braucht nicht geschätzt zu werden)

$RK^*Dur:= RK^*Sum/n$=: geschätzter Restkapitaldurchschnitt

**$r^*$:= geschätzter Interner Zinsfuß**

Für den beabsichtigten Ersatz der Größe RKDur(r) im Nenner der rechten Seite von (17) durch eine geeignete Schätzgröße $RK^*Dur$ ist die zugrunde liegende tatsächliche zeitliche Folge der Restkapitalien ($RK_0$, $RK_1(r)$, …, $RK_{n-1}(r)$) durch eine geeignete ***geschätzte*** zeitliche Folge ($RK_0$, $RK^*_1$,…, $RK^*_{n-1}$) zu ersetzen, die nicht von dem gesuchten Wert r abhängt.

Für die vorzustellende Schätzformel wurde als ***Prämisse*** der einfachste denkbare zeitliche Verlauf für die Schätzfolge ($RK_0$, $RK^*_1$,…, $RK^*_{n-1}$) unterstellt, nämlich ein ***linearer*** zeitlicher Verlauf aufgrund ***konstanter*** Tilgungen $T^*_t=a_0/n$=konst. (t=1, 2,…,n).

Aus dieser Prämisse folgt:

(19)

$\mathbf{RK_0=a_0}$

$RK^*_1=a_0-1*a_0/n$

$RK^*_2=a_0-2*a_0/n$

usw.

$\mathbf{RK^*_{n-1}=a_0-(n-1)*a_0/n=a_0/n}$

mit:
$T^*_t=a_0/n$=konst. (t=1, 2,…,n)

Zu beachten ist, dass der Schätzwert für das Restkapital zum Laufzeitende $RK^*_n= a_0-n^* a_0/n=0$ nicht in den Schätzwert $RK^*Dur$ für das durchschnittliche Restkapital einfließt, weil für die *letzte* nachschüssige Zinszahlung zum Laufzeitende t=n gilt: $Z_n(i)=i^*RK_{n-1}(i)$, das nachfolgende Restkapital $RK_n(i)$ also zu keiner weiteren Zinszahlung führt.

Die Schätzfolge $(RK_0, RK^*_1,\ldots, RK^*_{n-1})$ der Restkapitalien in (19) stellt mathematisch eine arithmetische Folge (konstante Differenzen) dar. Der Wert der Summe dieser Folge ist nach den mathematischen Regeln für eine arithmetische Reihe:

$$RK^*Sum:=RK_0+RK^*_1+\ldots+ RK^*_{n-1}=(RK_0+RK^*_{n-1})^*\ n/2=(a_0+a_0/n)^*\ n/2 \tag{20}$$

Mit (20) ergibt sich für das *durchschnittliche* Restkapital RKDur(r) im Nenner der rechten Seite von Gleichung (17) ein Schätzwert von:

$$RK^*Dur:=RK^*Sum/n=(a_0+a_0/n)/2 \tag{21}$$

Einsetzen von Gleichung (21) in Gleichung (17) ergibt schließlich die gesuchte ***Schätzformel für den Internen Zinsfuß r*** :

$$r^* \quad := \quad \frac{\dfrac{(c_1+c_2+\cdots+c_n)-a_0}{n}}{\dfrac{a_0+\dfrac{a_0}{n}}{2}} \quad = \quad \frac{ZDurE}{RK^*Dur} \tag{22}$$

mit:
ZDurE:=ZSumE/n=erwirtschafteter Zinsdurchschnitt
$RK^*Dur:=RK^*Sum/n$=:geschätzter Restkapitaldurchschnitt
$RK^*Sum:=RK_0+RK^*_1+\ldots+ RK^*_{n-1}$=:geschätzte Restkapitalsumme
**$r^*$:= geschätzter Interner Zinsfuß**

Gemessen an der anspruchsvollen Aufgabe ist die Struktur der Schätzformel (22) überaus einfach: mit cSum, $a_0$ und n gibt es nur drei Bestimmungsgrößen für $r^*$ (ähnlich wie bei dem berühmten Satz des Pythagoras „$a^2+b^2=c^2$“ , der sogar mit nur zwei Bestimmungsgrößen auskommt). Mit den Basisdaten der Zahlungsreihe $(-a_0, c_1, c_2, \ldots , c_n)$ einer Investition (vgl. Definition (1)) stehen die für die Gleichung (22) benötigten Bestimmungsgrößen unmittelbar zur Verfügung und können mit Hilfe der Grundrechenarten in einem einzigen Rechenschritt in den gesuchten Schätzwert $r^*$ umgerechnet werden. Zudem stellt lediglich der Nenner $RK^*Dur$ auf der rechten Seite von (22) eine Schätzung dar, während der hier neu eingeführte Zähler ZDurE exakt ist (vgl. (22) mit (17)). Wie im Titel des Beitrags angekündigt ermöglicht die Schätzgleichung (22) also tatsächlich eine „elementare Abschätzung“ für den Internen Zinsfuß r.

## D. Genauigkeit der Schätzformel

Die erwartbare Genauigkeit der Schätzformel (22) soll jetzt anhand von vier Testbeispielen untersucht werden.

**<u>Testbeispiel 1</u>: die in der Tabelle (3) dargestellte Investition**

**<u>Testbeispiel 1:</u>**

| i=r | 10,00% |
|---|---|

(23)

| t | -a | c | Z | T | RK | T kumuliert | T* | T* kumuliert | RK* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1000 | | | | 1000,00 | | | | 1000,00 |
| 1 | | 300 | 100,00 | 200,00 | 800,00 | 200,00 | 200,00 | 200,00 | 800,00 |
| 2 | | 180 | 80,00 | 100,00 | 700,00 | 300,00 | 200,00 | 400,00 | 600,00 |
| 3 | | 370 | 70,00 | 300,00 | 400,00 | 600,00 | 200,00 | 600,00 | 400,00 |
| 4 | | 240 | 40,00 | 200,00 | 200,00 | 800,00 | 200,00 | 800,00 | 200,00 |
| 5 | | 220 | 20,00 | 200,00 | 0,00 | 1000,00 | 200,00 | 1000,00 | 0,00 |
| Summe | -1000 | 1310 | 310,00 | 1000,00 | 3100,00 | | 1000,00 | | 3000,00 |
| | -aSum | cSum | **ZSumB** | TSum | RKSum (*) | | T*Sum | | RK*Sum (*) |

(*) Summe für t=0 bis t=**n-1**

**<u>Gleichung (22):</u>**

| ZDurE | 62 | RK*Dur (*) | 600 | r* | 10,33% |
|---|---|---|---|---|---|

**<u>Schätzgenauigkeit:</u>**

| r | 10,00% | r* | 10,33% | (r*-r)/r | 0,03 |
|---|---|---|---|---|---|

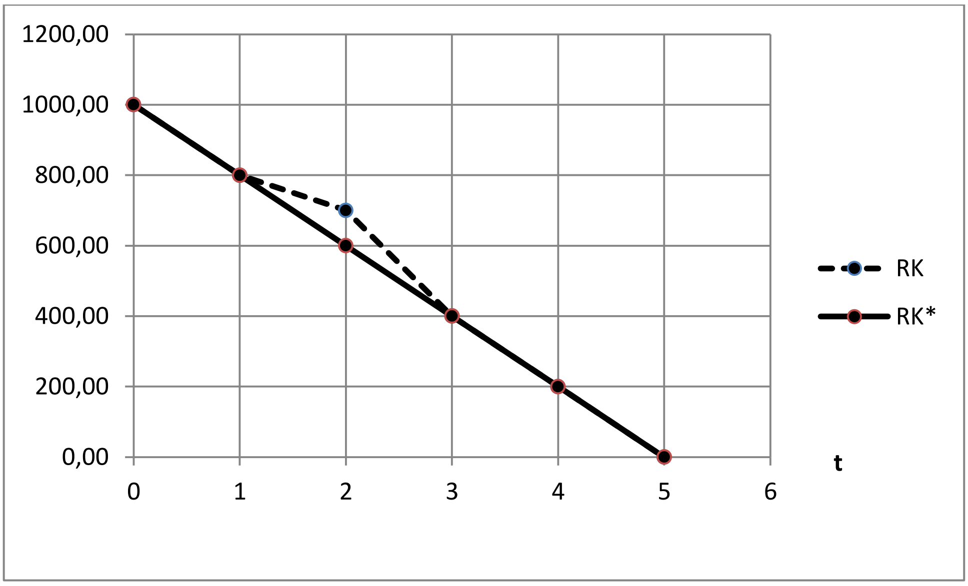


**Abbildung 3: Testbeispiel 1, Kurvenverlauf von $RK_t(r)$ und $RK^*_t$ (t=1 bis n)**

In Tabelle (23) wurden auf der rechten Seite die der Schätzgleichung (22) zugrunde liegenden Schätzgrößen $T^*$ und $RK^*$ ergänzt sowie im unteren Teil die Berechnung von $r^*$ nach (22) und zur Feststellung der Schätzgenauigkeit (Treffsicherheit) ein Vergleich von $r^*$ mit r einschließlich einer Berechnung der relativen Abweichung $(r^*-r)/r$ hinzugefügt.

Im Testbeispiel 1 zeigt sich eine überraschend gute Schätzgenauigkeit von $r^*$: der Schätzwert $r^*$ weicht vom tatsächlichen Wert r lediglich um 3/100*r ab.

Die gute Schätzgenauigkeit von $r^*$ in Tabelle (23) ist leicht erklärt. Die tatsächliche $T_t(r)$-Folge und die durch die Prämisse $T^*_t=a_0/n$=konst. vorgegebene $T^*_t$-Folge weichen nur in t=2 und t=3 voneinander ab, und zwar dergestalt, dass die resultierende $RK_t(r)$-Folge und die $RK^*_t$-Folge lediglich in t=2 voneinander abweichen (vgl. dazu auch die kumulierten Spalten $T_{kumuliert}$ und $T^*_{kumuliert}$ miteinander). Folglich liegen auch die Durchschnittsgrößen RKDur(r)=3100/5=620 und $RK^*$Dur=3000/5=600 nahe beieinander und deshalb auch die nach (22) und (17) resultierenden Größen $r^*$=62/600=10,33% und r=62/620=10%.

Die Kurvenverläufe in Abbildung 3 veranschaulichen, dass $RK^*$Dur kleiner als RKDur(r) sein muss, so dass die Schätzgröße $r^*$ den tatsächlich Wert r zwangsläufig *über*schätzt ($r^*>r$). Das gleiche Ergebnis zeigt ein Vergleich der kumulierten Spalten $T_{kumuliert}$ und $T^*_{kumuliert}$ miteinander.

Verallgemeinernd lässt sich vermuten, dass die Schätzgenauigkeit von $r^*$ umso höher ist, je näher die tatsächliche $T_t(r)$-Folge und die durch die Prämisse $T^*_t=a_0/n$=konst. vorgegebene $T^*_t$-Folge beieinander liegen.

Diese Vermutung soll durch das nachfolgende Testbeispiel 2 bestätigt werden.

Um eine vertiefte Analyse der Testbeispiele 2 bis 4 zu ermöglichen, soll aber vorab das Konzept der ***„Ersparten Zinsen“*** eingeführt werden.

Aus $Z_{t-1}(i)=RK_{t-2}(i)*i$ und $Z_t(i)=RK_{t-1}(i)*I$ folgt $Z_t(i)- Z_{t-1}(i)=(RK_{t-1}(i)-RK_{t-2}(i))*i$ und hieraus schließlich mit $RK_{t-1}(i)= RK_{t-2}(i)-T_{t-1}(i)$:

(L1) $Z_t(i)- Z_{t-1}(i)= -T_{t-1}(i)*i$=:-***Ersparte Zinsen***

Aus $T_t(i)=c_t-Z_t(i)$ folgt mit der Symbolvereinbarung $\Delta X_t:=X_t-X_{t-1}$ :

(L2) $\Delta T_t(i)=\Delta c_t-\Delta Z_t(i)$

Einsetzen von (L1) in (L2) ergibt schließlich:

(24)
$\Delta T_t(i)=\Delta c_t+T_{t-1}(i)*i$

mit:
$T_{t-1}(i)*i$=:***Ersparte Zinsen***

Gleichung (24) erlaubt Rückschlüsse auf die Veränderung von $T_t(i)$ bei vorgegebener Veränderung von $c_t$ und umgekehrt, insbesondere für den Fall, dass $\Delta T_t(r)=0$ (Testbeispiel 2) oder $\Delta c_t=0$ (Testbeispiel 3) vorgegeben wird.

**<u>Testbeispiel 2</u>: eine konstruierte Beispielinvestition mit $T_t(r)=a_0/n$=konst.**

Die Vorgabe einer konstanten Tilgung $T_t(r)=a_0/n$ bedeutet, dass in Gleichung (24) $\Delta T_t(r)=0$ ist, so dass $\Delta c_{t=}$ - $T_{t-1}(r)*r$ sein muss. Die Folge der Einzahlungsüberschüsse ($c_1$, $c_2$, … , $c_n$) muss für Testbeispiel 2 also so konstruiert werden, dass sie auf Basis des Internen Zinsfußes r mit jedem Schritt $\Delta t=+1$ um die ersparten Zinsen $T_{t-1}(r)*r=a_0/n*r$ ***sinkt***.

**Testbeispiel 2:**

| i=r | 10,00% |
|---|---|

(25)

| t | -a | c | Z | T | RK | T kumuliert | T* | T* kumuliert | RK* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -100 | | | | 100,00 | | | | 100,00 |
| 1 | | 30 | 10,00 | 20,00 | 80,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 80,00 |
| 2 | | 28 | 8,00 | 20,00 | 60,00 | 40,00 | 20,00 | 40,00 | 60,00 |
| 3 | | 26 | 6,00 | 20,00 | 40,00 | 60,00 | 20,00 | 60,00 | 40,00 |
| 4 | | 24 | 4,00 | 20,00 | 20,00 | 80,00 | 20,00 | 80,00 | 20,00 |
| 5 | | 22 | 2,00 | 20,00 | 0,00 | 100,00 | 20,00 | 100,00 | 0,00 |
| Summe | -100 | 130 | 30,00 | 100,00 | 300,00 | | 100,00 | | 300,00 |
| | -aSum | cSum | ZSumB | TSum | RKSum (*) | | T*Sum | | RK*Sum (*) |

(*) Summe für t=0 bis t=**n-1**

**Gleichung (22):**

| ZDurE | 6 | RK*Dur (*) | 60 | r* | 10,00% |
|---|---|---|---|---|---|

**Schätzgenauigkeit:**

| r | 10,00% | r* | 10,00% | (r*-r)/r | 0,00 |
|---|---|---|---|---|---|

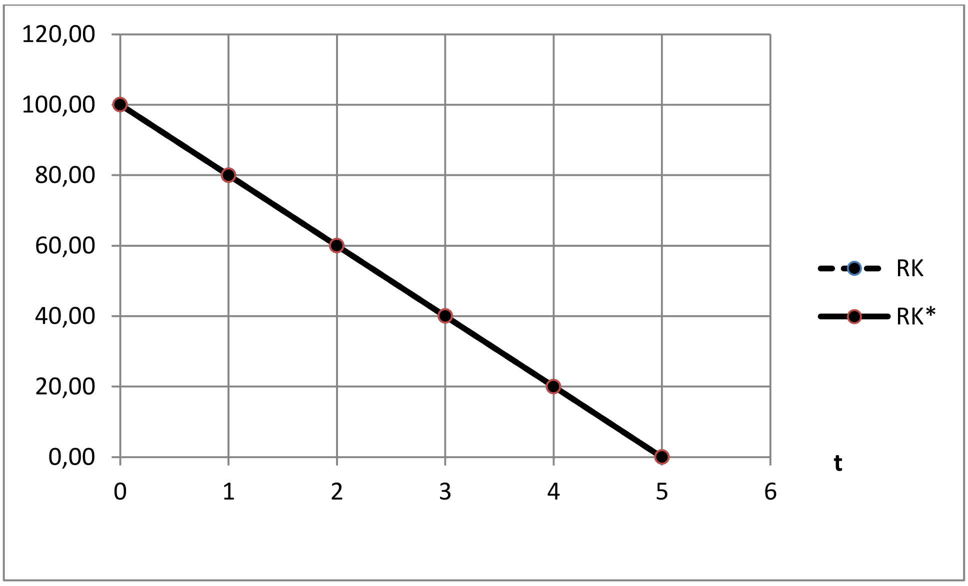


**Abbildung 4: Testbeispiel 2, Kurvenverlauf von $RK_t(r)$ und $RK^*_t$ (t=1 bis n)**

Die tatsächliche $T_t(r)$-Folge ($T_t(r)=a_0/n$=konst.) und die durch die Prämisse $T^*_t=a_0/n$=konst. vorgegebene $T^*_t$-Folge einerseits und die resultierende $RK_t(r)$-Folge und die $RK^*_t$-Folge andererseits stimmen jeweils perfekt überein, so dass zwangsläufig auch der Schätzwert $r^*$ mit dem tatsächlichen Wert r perfekt übereinstimmt. Der relative Schätzfehler $(r^*-r)/r$ ist gleich Null.

Die nach dem Testbeispiel 1 geäußerte Vermutung hat sich also in diesem Einzelfall bestätigt.

**<u>Testbeispiel 3</u>:** **eine Beispielinvestition nach dem Vorbild eines Grundschulddarlehens mit konstanten Rückzahlungsbeträgen $c_t$**

Zum Verständnis: die Gewährung eines Grundschulddarlehens ist aus Sicht der Bank eine Investition in den Kreditvertrag.

Bei konstanten Rückzahlungsbeträgen $c_t$ und damit $\Delta c_t=0$ folgt aus Gleichung (24), dass $\Delta T_t(r)=+T_{t-1}(r)*r$, d.h. dass die Tilgungsbeträge $T_t(r)$ fortlaufend um die ersparten Zinsen $T_{t-1}(r)*r$ ansteigen (stetig größer werden; Prämisse: $T_{t-1}(r)>0$), so dass die Kurve $RK_t(r)$ – bei gleichem Start- und Endpunkt wie die Kurve $RK^*_t$ – ***oberhalb*** der Kurve $RK^*_t$ ***progressiv fallen*** muss. Also lässt sich prognostizieren, dass im Testbeispiel 3 der Schätzwert $r^*$ gemäß Gleichung (22) den tatsächlichen Wert r ***überschätzen*** wird ($r^*>r$).

**<u>Testbeispiel 3:</u>**

| i=r | 10,00% |
|---|---|

(26)

| t | -a | c | Z | T | RK | T kumuliert | T* | T* kumuliert | RK* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -997 | | | | 997,00 | | | | 997,00 |
| 1 | | 263 | 99,70 | 163,30 | 833,70 | 163,30 | 199,40 | 199,40 | 797,60 |
| 2 | | 263 | 83,37 | 179,63 | 654,07 | 342,93 | 199,40 | 398,80 | 598,20 |
| 3 | | 263 | 65,41 | 197,59 | 456,48 | 540,52 | 199,40 | 598,20 | 398,80 |
| 4 | | 263 | 45,65 | 217,35 | 239,12 | 757,88 | 199,40 | 797,60 | 199,40 |
| 5 | | 263 | 23,91 | 239,09 | 0,04 | 996,96 | 199,40 | 997,00 | 0,00 |
| Summe | -997 | 1315 | 318,04 | 996,96 | 3180,37 | | 997,00 | | 2991,00 |
| | -aSum | cSum | **ZSumB** | TSum | RKSum (*) | | T*Sum | | RK*Sum (*) |

(*) Summe für t=0 bis t=**n-1**

**<u>Gleichung (22):</u>**

| ZDurE | 63,6 | RK*Dur (*) | 598,2 | r* | 10,63% |
|---|---|---|---|---|---|

**<u>Schätzgenauigkeit:</u>**

| r | 10,00% | r* | 10,63% | (r*-r)/r | 0,06 |
|---|---|---|---|---|---|

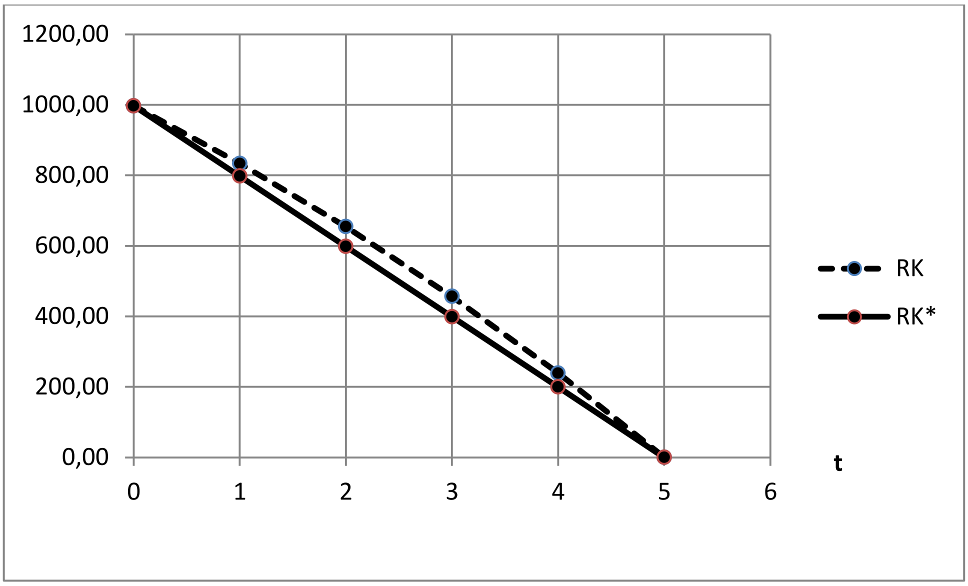


**Abbildung 5: Testbeispiel 3, Kurvenverlauf von $RK_t(r)$ und $RK^*_t$ (t=1 bis n)**

Im Testbeispiel 3 zeigt sich eine gute Schätzgenauigkeit von $r^*$: der Schätzwert $r^*$ weicht vom tatsächlichen Wert r lediglich um 6/100*r ab.

Die zu Beginn von Testbeispiel 3 aufgestellte Prognose ($r^*>r$) hat sich bestätigt.

Verallgemeinernd darf vermutet werden, dass bei Investitionen mit annähernd konstanten Rückzahlungsbeträgen $c_t$ gute Schätzgenauigkeiten von $r^*$ gemäß Gleichung (22) erwartet werden dürfen.

Diese Vermutung bestätigt auch das nachstehende Praxisbeispiel eines realen Grundschulddarlehens mit konstanten Rückzahlungsbeträgen $c_t$ und folgenden Ausgangsdaten (mit einem deutlich größeren Maßstab als in den bisherigen Testbeispielen):

Kreditbetrag($a_0$): 123000 Euro
Nominalzins (i): 4,88% pro Jahr; 4,88%/12= 0,4067% pro Monat
**Interner Zinsfuß (r): 0,4067% pro Monat**
Rückzahlungsbeträge ($c_t$ für t=1 bis 119): 1296,63 Euro pro Monat
Laufzeit (n):119 Monate (wesentlich größer als n=5 in den Testbeispielen: deutliche Ausdehnung des Testfeldes)
Abschlusszahlung (Extra $c_t$ in t=119): 1410,16 Euro.

Die Anwendung von Schätzgleichung (22) ergibt:
ZSumE=cSum-$a_0$=(119*1296,63+1410,16)-123000=32709,13
ZDurE=32709,13/119=274,87
$RK^*$Dur=($a_0$+$a_0$/n)/2=(123000+123000/119)/2=62016,81
**Geschätzter Interner Zinsfuß r*=** ZDurE/ $RK^*$Dur=274,87/62016,81=**0,4432% pro Monat**
(5,32% pro Jahr).

Vergleich mit r=0,4067% pro Monat: ($r^*$-r)/r=0,0898 ($r^*>r$).

Auch in dem realen Praxisbeispiel zeigt sich eine gute Schätzgenauigkeit von $r^*$: der Schätzwert $r^*$ weicht vom tatsächlichen Wert r lediglich um ca. 9/100*r ab (Schätzfehler von knapp 9%). Die vor dem Praxisbeispiel aufgestellte Vermutung hat sich bestätigt.

**<u>Testbeispiel 4</u>: eine Beispielinvestition mit einer stark ansteigenden $c_t$-Folge**

Um mit den Testbeispielen möglichst alle denkbaren Typen von Zahlungsreihen ($-a_0$, $c_1$, $c_2$, … , $c_n$) von Investitionen abzudecken, wird jetzt – im Gegensatz zu den vorhergehenden Testbeispielen - eine Beispielinvestition mit einer stark ansteigenden $c_t$-Folge unterstellt.

**<u>Testbeispiel 4:</u>**

| i=r | 10,00% |
|---|---|

| | t | -a | c | Z | T | RK | T kumuliert | T* | T* kumuliert | RK* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | -800 | | | | 800,00 | | | | 800,00 |
| | 1 | | 100 | 80,00 | 20,00 | 780,00 | 20,00 | 160,00 | 160,00 | 640,00 |
| | 2 | | 100 | 78,00 | 22,00 | 758,00 | 42,00 | 160,00 | 320,00 | 480,00 |
| | 3 | | 300 | 75,80 | 224,20 | 533,80 | 266,20 | 160,00 | 480,00 | 320,00 |
| | 4 | | 300 | 53,38 | 246,62 | 287,18 | 512,82 | 160,00 | 640,00 | 160,00 |
| (27) | 5 | | 316 | 28,72 | 287,28 | -0,10 | 800,10 | 160,00 | 800,00 | 0,00 |
| | Summe | -800 | 1116 | 315,90 | 800,10 | 3158,98 | | 800,00 | | 2400,00 |
| | | -aSum | cSum | **ZSumB** | TSum | RKSum (*) | | T*Sum | | RK*Sum (*) |

(*) Summe für t=0 bis t=**n-1**

**<u>Gleichung (22):</u>**

| ZDurE | 63,2 | RK*Dur (*) | 480 | r* | 13,17% |
|---|---|---|---|---|---|

**<u>Schätzgenauigkeit:</u>**

| r | 10,00% | r* | 13,17% | (r*-r)/r | 0,32 |
|---|---|---|---|---|---|

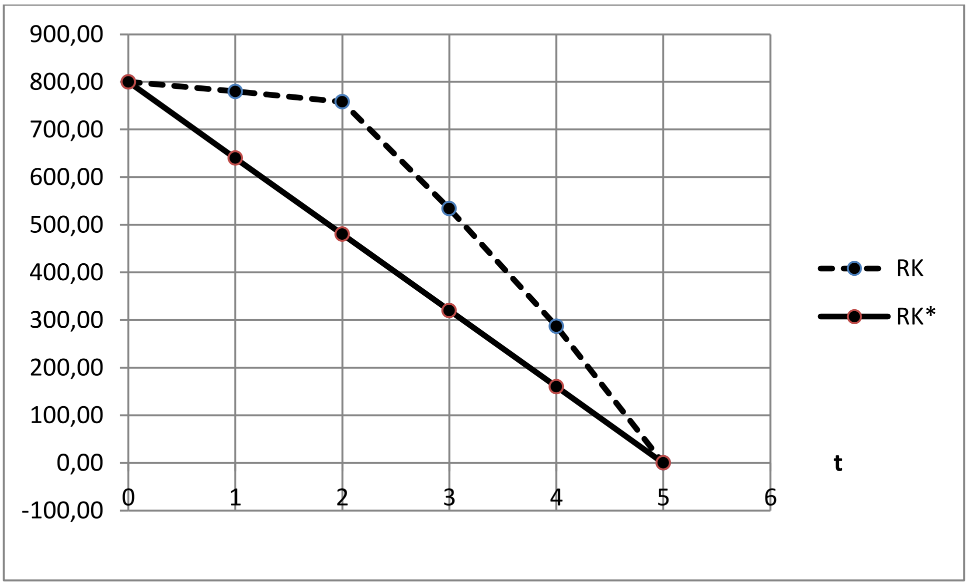


**Abbildung 6: Testbeispiel 4, Kurvenverlauf von $RK_t(r)$ und $RK^*_t$ (t=1 bis n)**

Aufgrund des starken Anstiegs der $c_t$-Folge steigt auch die $T_t(r)$-Folge stark an, so dass die tatsächlichen Tilgungen $T_t(r)$ für t=1 und t=2 deutlich unterhalb und für t=3 bis t=5 deutlich oberhalb der geschätzten Tilgungen $T^*_t$ liegen. Folglich verläuft die Kurve der resultierenden $RK_t(r)$-Folge (bei gleichem Start- und Endpunkt) deutlich oberhalb der Kurve der $RK^*_t$-Folge, so dass der Schätzwert $r^*$ den tatsächlichen Wert r deutlich überschätzt: der Schätzwert $r^*$=13,17% weicht vom tatsächlichen Wert r=10% deutlich um 32/100*r nach oben ab.

Ein so großer Schätzfehler ist je nach Einsatzzweck allenfalls gerade noch akzeptabel. Bei außergewöhnlichen Investitionen mit einer extrem ansteigenden $c_t$-Folge (hier ca. Faktor 3) ist also Vorsicht bei der Anwendung der Schätzgleichung (22) geboten.

Zum Abschluss noch der Hinweis, dass der Schätzwert $r^*$ nach Gleichung (22) in Einzelfällen den tatsächlichen Wert r auch ***unterschätzen*** kann – im Gegensatz zu den obigen Testbeispielen. Invertiert man z.B. in Testbeispiel 4 die $c_t$-Folge von (100; 100; 300; 300; 316) (stark steigend) nach (316; 300; 300; 100; 100) (stark fallend), so ergibt sich als Resultat: $r^*$=13,17% < r=15,37% und $(r^*-r)/r$= -0,14. Die interessierten Leser mögen versuchen, dieses Resultat analog zur Tabelle (27) selbst nachzurechnen – sicher mit Erkenntnisgewinn.

Die folgende Übersichtstabelle (28) fasst noch einmal die wichtigsten Ergebnisse zur Schätzgleichung (22) und zu deren Genauigkeit zusammen:

(28)

| | | (S1)<br>Tilgungen<br>t=1 bis n | (S2)<br>Restkapitalien<br>t=0 bis n-1 | (S3)<br>Restkapital-durchschnitt<br>t=0 bis n-1 | (S4)<br>Interner Zinsfuß<br>t=0 bis n |
|---|---|---|---|---|---|
| (Z1) | Schätz-werte:<br>durch Prämisse vorgegeben | (19) $T^*_t=a_0/n$<br>Konstant | (19) $RK^*_t=a_0-t^*\ a_0/n$<br>Linear fallend<br>Start: (t=0; $RK^*_0=a_0$)<br>Ende: (t=n; $RK^*_n=0$) | (21)<br>$RK^*Dur=(a_0+a_0/n)/2$ | (22)<br>$r^*=ZDurE/RK^*Dur$ |
| | | $\Delta T^*_t=0$ | $\Delta RK^*_t= -a_0/n$ | | |
| | | $T^*Sum=n^*(a_0/n)=a_0$ | (20)<br>$RK^*Sum=(a_0+a_0/n)^*n/2$ | | |
| (Z2) | Tatsächliche Werte:<br>abhängig von r | (2)(g) $T_t(r)=c_t-Z_t(r)$<br>(a) Steigend für $\Delta c_t> -T_{t-1}(r)^*r$<br>(b) Konstant für $\Delta c_t= -T_{t-1}(r)^*r$<br>(c) Fallend für $\Delta c_t< -T_{t-1}(r)^*r$<br>(t=2 bis n) | (13) $RK_t(r)=$<br>$a_0-(T_1(r))+\ldots+T_t(r))$<br>Fallend (für $T_t(r)>0$)<br>Start: (t=0; $RK_0(r)=a_0$)<br>Ende: (t=n; $RK_n(r)=0$)<br>(wie $RK^*_t$ !) | (17)<br>$RKDur(r)=$<br>$RKSum(r)/n$ | (17)<br>r =<br>ZDurE/RKDur(r)<br>(13)<br>r =<br>Nullstelle der Funktion $RK_n(i)$<br>(Lösung von $RK_n(r)=0$) |
| | | (24)<br>$\Delta T_t(r)= \Delta c_t+T_{t-1}(r)^*r$<br>mit $T_{t-1}(r)^*r=$<br>Ersparte Zinsen<br>(t=2 bis n) | $\Delta RK_t= -T_t(r)$ | | |
| | | (6) $TSum(r)=a_0$<br>(wie $T^*Sum$) | (17)<br>$RKSum(r)=$<br>$RK_0(r)+RK_1(r)+\ldots+$<br>$RK_{n-1}(r)$ | | |

Tabelle (28) erlaubt unter bestimmten Voraussetzungen Rückschlüsse auf den Verlauf der $T_t(r)$-Folge in Relation zu der $T^*_t$-Folge (Spalte (S1)) und damit auch auf das Verhältnis von $RK_t(r)$ zu $RK^*_t$, von RKDur(r) zu $RK^*$Dur und von r zu $r^*$ (Spalten (S2) bis (S4)).

Aus $T^*$Sum=TSum(r)=$a_0$ (Spalte(S1)) folgt der Hilfssatz (L3):

(L3) $(T_1(r)-T^*_1)+(T_2(r)-T^*_2)+\ldots+(T_n(r)-T^*_n)=0$ (mit $T^*_t=a_0/n$=konst.)
(Summe der Oberabweichungen ($T_t(r)>T^*_t$) = -Summe der Unterabweichungen ($T_t(r)<T^*_t$))

Beispielsweise für den Fall $\Delta c_t \geq 0$ für alle t=1bis n ($c_t$-Folge monoton nicht fallend) folgt daraus unter der Prämisse $T_{t-1}(r)>0$ für alle t:

- $T_t(r)$ monoton steigend (Feld Z2S1)
- Zumindest $T_1(r)<T^*_1=a_0/n$ (ansonsten wäre (L3) verletzt und TSum(r)>$a_0$)
- Zumindest $T_n(r)>T^*_n=a_0/n$ (ansonsten wäre (L3) verletzt und TSum(r)<$a_0$)
- ($T_t(r)-T^*_t$)-Folge in (L3) zumindest am ***Anfang*** (t=1) ***negativ*** und zumindest am Schluss (t=n) positiv (weil nach (L3) gilt: -Summe der Unterabweichungen=Summe der Oberabweichungen)
- $RK_t(r)$-Kurve zumindest am ***Anfang*** (t=1) ***oberhalb*** der $RK^*_t$-Kurve und unter „normalen" Bedingungen – wie im obigen Testbeispiel 3 – auch im weiteren Verlauf (bis t=n-1) mit der Folge, dass RKDur(r)>$RK^*$Dur und damit r<r* (***Überschätzung*** von r durch $r^*$; Spalten (S3) und (S4)).

Generell gilt für die Schätzgenauigkeit von Schätzgleichung (22) gemäß den Gleichungen (17) und (22):

(29) $$\boxed{r^* = \frac{RKDur(r)}{RK^*Dur} * r}$$

Je näher also der geschätzte Restkapitaldurchschnitt $RK^*$Dur bei dem tatsächlichen Restkapitaldurchschnitt RKDur(r) liegt, desto genauer liegt der Schätzwert $r^*$ bei dem tatsächlichen Wert r.

Für den Sonderfall einer ***einperiodigen*** Investition (Laufzeit n=1) liefert die Schätzgleichung (22) ***immer exakte*** Schätzwerte (aus n=1 sowie (22) und (13) mit $RK_1(r)=0$ oder (10) mit $C_0(r)=0$):

(30) $$\boxed{r^* = \frac{c_1 - a_0}{a_0} = r \quad f\ddot{u}r\, n = 1}$$

### III. Ergebnis

Im ersten Teil dieses Beitrags wurde eine neue, erstmals intuitiv verständliche Definition für den Internen Zinsfuß r vorgestellt. Die in der Theorie und vor allem in der Praxis vorherrschenden

Verständnisprobleme hinsichtlich des Konzepts des Internen Zinsfußes sollten damit der Vergangenheit angehören.

Im Gegensatz dazu behaupten Brealey/Myers:

„The source of the difficulty is that the IRR is a derived figure without any simple economic interpretation. If we wish to define it, we can do no more than say that it is the discount rate which applied to all cash flows makes NPV=0.“[4] (IRR := Internal Rate of Return; NPV := Net Present Value)

Ähnlich kritisch äußert sich auch Kruschwitz:

„Der interne Zinssatz ist derjenige Zinssatz r, der den Kapitalwert einer Investition genau null werden läßt … . Bei dieser rein formalen Definition müssen wir es bewenden lassen, weil eine ökonomische Interpretation der Zahl r in allgemeiner Form leider unmöglich ist.“[5]

Diese Darstellungen von Brealey/Myers und Kruschwitz können ab jetzt als widerlegt gelten (Definition (1)).

Darüber hinaus wurde formal gezeigt, dass die neue und die traditionelle Definition des Internen Zinsfußes im Endergebnis äquivalent sind.

Schließlich wurde mit dem ersten Teil dieses Beitrags die notwendige Ausgangsbasis für den zweiten Teil bereitgestellt.

Im zweiten Teil dieses Beitrags wurde erstmals eine einfache Schätzformel zur Ermittlung des Zahlenwertes des Internen Zinsfußes vorgestellt, die den Internen Zinsfuß erstmals als eine einfache Rendite (Zinsen/Kapital) darstellt und dadurch erneut zu einem besseren Verständnis des Internen Zinsfußes beiträgt. Im Vergleich zu den ansonsten notwendigen, sehr rechenaufwendigen iterativen Verfahren der numerischen Mathematik ein großer Fortschritt, der erstmals eine annähernde Berechnung des Internen Zinsfußes quasi „im Kopf“ bzw. mit Hilfe eines einfachen Taschenrechners ermöglicht.

Anhand diverser Zahlenbeispiele wurde gezeigt, dass die Schätzformel in Einzelfällen überraschend genaue Schätzwerte liefern kann. Zum Vergleich: die numerischen Verfahren der Mathematik liefern ebenfalls keine absolut exakten Ergebnisse, die aber I.d.R. durch erhebliche Steigerung des Rechenaufwandes beliebig genau angenähert werden können.[6]

Schließlich wurden erste theoretische Überlegungen zu der zu erwartenden Schätzgenauigkeit der neuen Schätzformel vorgestellt. Zur abschließenden Klärung dieser Frage sind noch weitere Forschungen erforderlich, wie auch für den Versuch, für den Nenner $RK^{*}Dur$ in der neuen Schätzgleichung (22) eine noch leistungsfähigere Schätzgröße zu finden.

---

[4] Brealey, R. A. / Myers, St. C. : Principles of Corporate Finance, 6. Aufl. 2000, S. 108, Fußnote 8.

[5] Kruschwitz, L. : Investitionsrechnung, 8.Aufl. 2000, S. 97 f.

[6] Die in Fußnote 3 erwähnte Näherungslösung von Boulding für den internen Zinsfuß r liegt hinsichtlich der Schätzgenauigkeit im Vergleich zu der hier vorgestellten Schätzgleichung (22) in den obigen Testbeispielen 1 bis 4 einmal schlechter, einmal gleichauf und zweimal besser. Selbst angesichts des geringen Stichprobenumfangs: Respekt!

Die durch den Titel vorgegebene Zielsetzung dieses Beitrags war nicht gerade bescheiden, wollte dieser Beitrag doch gleich zweimal beinahe „Unmögliches“ versuchen - mit Erfolg, wie sich gezeigt hat.

## Literatur


| | |
|---|---|
| Brealey, R. A. / Myers, St. C. : | Principles of Corporate Finance, 6. Aufl. 2000 |
| Busse von Colbe, W. / Laßmann, G. : | Betriebswirtschaftstheorie, Band 3. Investitionstheorie, 3. Aufl. 1990 |
| Kruschwitz, L. : | Investitionsrechnung, 8.Aufl. 2000 |
| Lücke , W. (Hrsg.): | Investitionslexikon, 2.Aufl. 1991 |


## Abstract


**A new Interpretation and an elementary Estimation of the Internal Rate of Return**

This paper solves two practical problems in applying the Internal Rate of Return (IRR). Firstly, a new, very transparent definition for the first time enables a clear, intuitive understanding of the IRR. Secondly, a new elementary estimation formula for the first time avoids the great iterative computational effort in determining the numerical value of the IRR.